MSRI 25 April 2003

Workshop History of Algebra

Bartel L. van der Waerden's Work on Algebraic Geometry

Luitzen Egbertus Jan Brouwer $\mapsto$ Hellmuth Kneser, Laren (Nord-Holland), 21. Oktober 1924

about van der Waerden:

"... In einigen Tagen kommt ein Schüler von mir (oder eigentlich mehr von Weitzenböck) nach Göttingen zum Wintersemester. Er heisst Van der Waerden, ist sehr gescheit und hat schon einiges publiziert (namentlich über Invariantentheorie). Ich weiss nicht, ob für einen Ausländer, der sich immatrikulieren will, die zu erfüllenden Formalitäten momentan schwierig sind; jedenfalls wäre es für Van der Waerden von hohem Wert, wenn er dort etwas Hilfe und Führung fände. Darf er dann vielleicht einmal bei Ihnen vorsprechen? Vielen Dank im Voraus dafür."

v. d. W.

Zur algebraischen Geometrie

Selected Papers

Mit einem Geleitwort von F. Hirzebruch

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York Tokyo
1983

On Hilbert's Function, Series of Composition of Ideals and a generalization of the Theorem of Bezout 1927

Inhaltsverzeichnis

⊕ Rezension Weil Foundations 1948

⊗ ICM Amsterdam 1954.

1986 Francesco Severi and the foundations of algebraic geometry, Symposia Math. XXVII, 1986, 239–244.

D. Mumford (Parikh 1990, xxvf):

"The Italian school of algebraic geometry was created in the late 19th century by a half dozen geniuses who were hugely gifted and who thought deeply and nearly always correctly about their field. ... But they found the geometric ideas much more seductive than the formal details of the proofs.... So ... they began to go astray. It was Zariski and ... Weil who set about to tame their intuition, to find the principles and techniques that could truly express the geometry while embodying the rigor without which mathematics eventually must degenerate to fantasy."

2 Aspects <u>not</u> represented here:

* how new alg. techniques <u>transform</u> the field
* complexity of the developments of the 30's & 40's.

1925–1928. Emmy Noether's student: Ideal Theory

Summer 1925:

"When I studied Emmy Noether's paper [Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann. **90** (1924)], I saw that the point ξ with coordinates $\xi_1, \ldots, \xi_m$ was just the generic point I was looking for. I also saw that Emmy Noether's *Nullstellenkörper* was isomorphic to the quotient field of the residue class ring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$, where $\mathfrak{o}$ ist the polynomial ring $k[X]$, Hence it was not necessary to go through Hentzelt's elimination procedure; one could start with any prime ideal $\mathfrak{p} \neq 0$, construct the residue class ring $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ and its quotient field $k(\xi)$, and thus find a generic point ξ of the variety of $\mathfrak{p}$.

I wrote a paper [Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, Math. Ann. **96** 1926] based upon this simple idea and showed it to Emmy Noether. She at once accepted it for the Math. Annalen, without telling me that she had presented the same idea in a course of lectures just before I came to Göttingen. I heard it later from Grell, who attended her course." (vdW, Algebraic Geometry Selecta, p. 3)

From the opening of *Zur Nullstellentheorie der Polynomideale*, Math. Annalen **96**, 1926:

"Die exakte Begründung der Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten in n-dimensionalen Räumen kann nur mit den Hilfsmitteln der Idealtheorie geschehen, weil schon die Definition einer algebraischen Mannigfaltigkeit unmittelbar auf Polynomideale führt. Eine Mannigfaltigkeit heißt ja algebraisch, wenn sie durch algebraische Gleichungen in den n Koordinaten bestimmt wird, und die linken Seiten aller Geichungen, die aus diesen Gleichungen folgen, bilden ein Polynomideal.

Die Begründung kann nur einfacher gestaltet werden als es bisher geschehen ist, nämlich ohne Hilfe der Eliminationstheorie, ausschließlich auf dem Boden der Körpertheorie und der allgemeinen Idealtheorie in Ringbereichen."

1928–1932. Emulating Lefschetz: Topology

1928: Critique of ideal theory starts in *Eine Verallgemeiernung des Bézoutschen Theorems*, but for the moment the approach is still via commutative algebra and *relationstreue Spezialisierungen.*

——————— 6 May 1928 Ordinarius in Groningen ———————

1929: "Soweit sie reichte, hatte die algebraische Methode eine größere Allgemeinheit als jede analytische, da sie auf beliebige abstrakte Geometrien (die zu abstrakten Körpern gehören) anwendbar war. Aber bei der Übertragung der Methode auf Varietäten von Geraden u.dgl. stieß die Durchführung der Beweise auf immer wachsende Schwierigkeiten, und für solche Gebilde, die nicht wie der projektive Raum eine transitive Gruppe von Transformationen in sich gestatten, ist die Übertragung der obigen Multiplizitätsdefintion ganz ausgeschlossen.

...

Aber die Topologie besitzt einen Multiplizitätsbegriff: den Begriff des Schnittpunktes von zwei Komplexen, der schon von Lefschetz [1924] mit Erfolg auf die Theorie der algebraischen Flächen sowie auf Korrespondenzen auf algebraischen Kurven angewandt wurde.

...

Die Topologie leistet aber noch mehr als die Ermöglichung einer brauchbaren Multiplizitätsdefinition. Sie verschafft zugleich eine Fülle von Mitteln, die Indexsumme aller Schnittpunkte oder 'Schnittpunktzahl', deren Bestimmung das Ziel aller abzählenden Methoden ist, in einfacher Weise zu bestimmen, indem sie zeigt, daß diese Indexsumme nur von den Homologieklassen der zum Schnitt gebrachten Varietäten abhängt, und indem sie für die Bestimmung der Homologieklassen den ganzen Apparat der 'kombinatorischen Topologie' zur Verfügung stellt." (vdW, Algebraic Geometry Selecta, p. 102–104)

— 1 May 1931 Ordinarius in Leipzig, successor to Otto Hölder —

"... gelang es nun van der Waerden, gestützt auf die Resultate seiner Vorgänger, unter Verwendung neuer geistreicher Hilfsmittel sowohl algebraischer als auch mehr topologischer Natur den Problemen eine neue Wendung zu geben und entscheidende Fortschritte zu erzielen. Es ist zu erwarten, dass namentlich die abzählende Geometrie, deren Ergebnissen man bis jetzt mit nicht unberechtigter Skepsis gegenüberstand, von den Methoden und Resultaten von van der Waerden den grössten Nutzen ziehen wird."

Inaugural Lecture Leipzig 27 June 1931:
Die Gruppentheorie als ordnendes Prinzip.

Contact with the physicists Heisenberg and Hund.

1932–1939. Under Severi's influence: viva Italia

"At the Zürich International Congress in 1932 I met Severi, and I asked him whether he could give me a good algebraic definition of the multiplicity of a point of intersection of two varieties A and B, of dimensions d and $n-d$, on a variety U if dimension n, on which the point in question is simple. The next day he gave me the answer, and he published it in the *Hamburger Abhandlungen* in 1933. He gave several equivalent definitions ..." (vdW, Algebraic Geometry Selecta, p. 6)

Letter: Richard Courant $\mapsto$ Dr. Tisdale, Rockefeller Foundation Paris, 2 March 1933

"... Prof.Dr. B.L. van der Waerden, gegenwärtig Ordinarius an der Universität Leipzig, etwa 30 oder 31 Jahre alt, früherer Rockefeller fellow, hat mich darum gebeten, die Möglichkeit zu sondieren, ob ihm von der Rockefeller Foundation ein längerer Aufenthalt in Italien ermöglicht werden kann.

Van der Waerden ist trotz seiner grossen Jugend einer der hervorragenden Mathematiker, die es augenblicklich in Europa gibt. Er war bei der Neubesetzung des Hilbertschen Lehrstuhls einer der drei Kandidaten der Fakultät. Nun hat van der Waerden seit einigen Jahren erfolgreich begonnen, sich mit den Problemen der algebraischen Geometrie zu beschäftigen, und es ist sein sehr ernstes Bestreben, die Pflege dieses Gebietes in Deutschland wirklich zu betreiben. Tatsächlich ist die geometrisch-algebraische Tradition in Deutschland fast ausgestorben, während sie in Italien im Laufe der letzten Jahrzehnte zu hoher Blüte gelangt ist. Schon mehrere junge Mathematiker, z.B. Dr. Fenchel und Dr. Kähler sind mit einem Rockefellerstipendium in Italien gewesen und haben dort erfolgreich algebraische Geometrie studiert. Aber es würde für die wissenschaftliche Entwicklung von ganz anderer Wirksamkeit sein, wenn ein so hervorragender Mann wie van der Waerden die notwendige Verbindung auf einer breiteren Front herstellen könnte.

Aus solchen sachlichen Erwägungen ist van der Waerdens Wunsch entstanden, insbesondere in Kontakt mit Prof. Severi in Rom eine gewisse Zeit zu arbeiten und dann das Gewonnene hier nach Deutschland zu verpflanzen."

van der Waerden in his application to the Rockefeller Foundation:

wants to collaborate with Enriques and Severi; and Severi "is the man from which I hope to learn most".

From Tisdale's diary:

"van der Waerden, past fellow now at Leipzig is excellent. As a matter of fact, Princeton wants to get him in the faculty to replace shifts due to Flexner's activity. They will probably ask him to come for a semester in which they could have a mutual exchange of view."

van der Waerden to Courant in March 1936:

"my work in Algebraic Geometry found especially in America much acclaim."

David Mumford, from the preface to Parikh's biography of Oscar Zariski (p. xxv–xxvi)

The Italian school of algebraic geometry was created in the late 19th century by a half dozen geniuses who were hugely gifted and who thought deeply and nearly always correctly about their field. ... But they found the geometric ideas much more seductive than the formal details of the proofs... So, in the twenties and thirties, they began to go astray. It was Zariski and, at about the same time, Weil who set about to tame their intuition, to find the principles and techniques that could truly express the geometry while embodying the rigor without which mathematics eventually must degenerate to fantasy.

⇒ Question:

How does vd Waerden's orientation towards Italy (Severi) fit into the global development of alg. geometry in the 1930's?

vdW: ZAG VI, Algebraische Korrespondenzen und rationale Abbildungen

submitted to Mathematische Annalen 11 Oct 1933, published 1934

"Das Ziel der Serie meiner Abhandlungen 'Zur Algebraischen Geometrie' (ZAG) ist nicht nur, neue Sätze aufzustellen, sondern auch, die weitreichenden Methoden und Begriffsbildungen der italienischen geometrischen Schule in exakter algebraischer Begründung dem Leserkreis der Math. Annalen näherzubringen. Wenn ich dabei vielleicht einiges, was schon mehr oder weniger einwandfrei bewiesen vorliegt, hier wieder beweise, so hat das einen doppelten Grund. Erstens setzen die italienischen Geometer in ihren Beweisen meistens eine ganze Begriffswelt, eine Art geometrischen Denkens, voraus, mit der z.B. der Deutsche von heute nicht von vornherein vertraut ist. Zweitens aber ist es mir unmöglich, bei jedem Satz alle in der Literatur vorhandenen Beweise dahin nachzuprüfen, ob sich ein völlig einwandfreier darunter befindet, sondern ich ziehe es vor, die Sätze in meiner eigenen Art zu formulieren und zu beweisen. Wenn ich also hin und wieder eimal auf Unzulänglichkeiten in den verbreitetsten Darstellungen hinweisen werde, so erhebe ich damit keineswegs den Anspruch, der erste zu sein, der die Sachen nun wirklich exakt darstellt. !!

....

Die Beweismethoden der vorliegenden Untersuchung bestehen erstens in einer immer wiederholten Anwendung der 'relationstreuen Spezialisierung' und zweitens der Ergänzung beliebiger Teilmannigfaltigkeiten einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ zu vollständigen Schnitten von $\mathfrak{M}$ durch Hinzunahme von Restschnitten, welche einen vorgegebenen Punkt nicht enthalten. Die zweite Methode habe ich von Severi [Hamb. Abh. 1933] übernommen. (vdW, Algebraic Geometry Selecta, p. 134/137)

van der Waerden, Einführung in die Algebraische Geometrie, 1939

From the preface:

Bei der Auswahl des Stoffes waren nicht ästhetische Gesichtspunkte, sondern ausschließlich die Unterscheidung: notwendig — entbehrlich maßgebend. ... Die Idealtheorie, die mich bei meinen früheren Untersuchungen leitete, hat sich für die Grundlegung als entbehrlich herausgestellt; an ihre Stelle sind die weitertragenden Methoden der italienischen Schule getreten. !!

From the Introduction:

Die algebraische Geometrie ist entstanden durch die organische Verschmelzung der in Deutschland hoch entwickelten Theorie der algebraischen Kurven und Flächen mit der mehrdimensionalen Geometrie der italienischen Schule. ... Eine zweite Blüte erlebt die algebraische Geometrie in unseren Tagen, seit die Topologie sich in ihren Dienst gestellt hat, während gleichzeitig von der Algebra aus die Überprüfung der Grundlagen vorgenommen wird.

Weiter als bis zu diesen Grundlagen soll dieses Büchlein nicht gehen. Ihre algebraische Begründung ist jetzt soweit gediehen, daß es ohne weiteres möglich wäre, die Theorie 'von oben herab' darzustellen. Von einem beliebigen Grundkörper ausgehend, könnte man die Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum, sowie die Theorie der algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen entwickeln.

Hier wurde diese Darstellungsart nicht gewählt, vielmehr wird weitgehend die historische Entwicklung, wenn auch im einzelnen etwas abgekürzt und umgebogen, zum Vorbild genommen.

From the Zentralblatt review of the book by Fabio Conforto:

Questo volume, dedicato ad un'introduzione alla geometria algebrica, presenta alcune delle be note caratteristichedelle opere del suo Autore, e precisamente la nitidezza dell'esposizione, la rapidità e compattezza della trattazione, tenuta nei limiti di una severa economia, e la costante aspirazione al rigore ed alla chiarezza nei fondamenti. Non si trova invece quel serrato giuoco di concettò astratti, così caratteristico della "Moderne Algebra", che rende quest'ultima di difficile lettura per chi non abbia un'ampia preparazione preliminare.

...

Comunque sia, il notevole libro di van der Waerden agevolerà senza dubbio la conoscenza dei metodi della scuola italiana e coopererà ad una reciproca comprensione tra i geometri italiani e gli algebristi tedeschi, assolvendo così un compito di grande importanza.

F. Severi in the 1930's

contradictory nature of his contributions

* seminal ideas, eg
  → classifying curves, e.g. variety $V(n,\delta)$ classifying curves of degree n with δ nodes
  → equivalence relations on cycles (related to Chow & vdW)

* foundational problems keep arising, esp. from the Trattato (1926).

(cf. Brigaglia & Ciliberto, 1995)


GEOMERY
Italian school
Zariski
1934 Alg Surfaces
Topology
1939–41 Resol" of surface singul.
Severi
moduli of curves
intersection
equivalence
Schubert calc.
Gröbner
vd Waerden
- ideal th.
- topology
- Italian geo.
- Chow coordinates
Geppert
E. Noether
Deuring
correspondences
Function Field Arithmetic
Hasse
H.L. Schmid
Weil
'35 arithm. of alg. var.
'40 Riemann hyp. Note
'41 Ann. Ac. Note
'46 Foundations
Koehler
H. Kneser
Krull
multipl. ideal th.
valuations
Dedekind-Weber
Kronecker
ARITHMETIC

ARITHMETIC
Kronecker
Dedekind-Weber
E. Noether
Hasse
H.L. Schmid
Deuring
· correspondences →
Function Field Arithmetic
Weil
· '35 arithm of alg var.
· '40 Riemann hyp Note
· '41 Am Ac. Note
· '46 Foundations
Kaehler
H. Kneser
Krull
· multipl. ideal th.
· valuations
Zariski
· 1934 Alg Surfaces
· Topology
· 1939-'41 Resol. of surface singul.
Severi
· moduli of curves
· rational equivalence classes
· Schubert calc.
Gröbner
vd Waerden
Eippert
- idealth.
- topology
- Italian geo.
- chow coordinates
Italian school
GEOMETRY

KRULL.

Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche [1]). III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie [49]

Math. Z. 42 (1937), 745–766
[JFM 64.0078.01; Zbl 017.14901]

Beitrag III ordnet sich nicht unmittelbar in das in der Vorbemerkung von Beitrag I aufgestellte Programm ein: Wir beschränken uns keineswegs auf ganz abgeschlossene Integritätsbereiche, es werden nur ganze Ideale betrachtet, und es handelt sich nicht um Teilbarkeitsfragen. Aber die benutzten Beweismethoden tragen gerade an den wichtigsten Stellen einen stark arithmetischen [2]) Charakter, so daß die Aufnahme der Arbeit in die Beitragsreihe wohl gerechtfertigt sein dürfte.

Das Endziel der Untersuchung ist eine einfache Neubegründung und gleichzeitig möglichst weitgehende Verallgemeinerung der bekannten „Dimensionstheorie" der Polynomringe [3]). Es bedeute $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* den Ring aller Polynome bzw. aller formalen (oder, je nach den Umständen auch: aller konvergenten) Potenzreihen in endlich oder unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ über einem beliebigen Koeffizientenkörper K; der Oberring $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* wird als „ganzer algebraischer" bzw. „ganzer analytischer" Funktionenring (über K) bezeichnet, wenn $\mathfrak{R}$, d. h. jedes Element α aus $\mathfrak{R}$, von $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* ganz abhängt, also einer Gleichung $\alpha^m + p_1 \alpha^{m-1} + \ldots + p_m = 0$ mit Koeffizienten p_i aus $\mathfrak{P}^*$ bzw. Π^* genügt. Ist die Anzahl der Variabeln x_i endlich, etwa gleich n, so schreiben wir $\mathfrak{R}$ den „Transzendenzgrad n" zu [4]); ist die Anzahl der x_i unendlich, so setzen wir den Transzendenz-

[1]) Vgl. Beitrag I und Beitrag II, Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 545—577 bzw. 665—679. Vgl. ferner meinen „Idealbericht" [Idealtheorie. Ergebnisse d. Mathematik u. ihrer Grenzgebiete Bd. 4, Heft 3 (1935)].

[2]) Unter Sätzen von ausgesprochen „arithmetischem" Charakter verstehe ich Sätze, die in den Gedankenkreis der „multiplikativen", an Dedekind anknüpfenden Richtung der Idealtheorie und der Bewertungstheorie gehören. (Über den Unterschied zwischen „additiver" und „multiplikativer" Idealtheorie, vgl. z. B. die Einleitung des Idealberichts).

[3]) Zur Dimensionstheorie der Polynom- und Potenzreihenringe vgl. Anm. [8]).

[4]) Im algebraischen (aber nicht im analytischen!) Fall handelt es sich einfach um den Steinitzschen Transzendenzgrad des Quotientenkörpers von $\mathfrak{R}$ über K. Vgl. Anm. [27]).

vdW.

23.

Die Bedeutung des Bewertungsbegriffs für die algebraische Geometrie

Bericht, vorgetragen auf der Tagung in Jena am 23. Okt. 1941

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 52, 2 (1942) 161–172

Durch neuere amerikanische Untersuchungen sind die beiden miteinander zusammenhängenden Fragen der lokalen Uniformisierung der algebraischen Mannigfaltigkeiten und ihrer birationalen Transformation in singularitätenfreie um ein beträchtliches Stück ihrer vollständigen Lösung näher gebracht worden. Dabei hat sich der Bewertungsbegriff in wachsendem Maße als fundamental erwiesen. Ein zusammenhängender Bericht über diese Untersuchungen ist um so mehr erwünscht, da die amerikanischen Zeitschriften jetzt nicht allgemein zugänglich sind.

§ 1. Algebraische Funktionen einer Veränderlichen.

Die Grundbegriffe der Theorie der algebraischen Funktionen von mehreren Veränderlichen versteht man am besten, wenn man von der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen ausgeht.

Zu einer algebraischen Kurve im n-dimensionalen projektiven Raum gehört ein algebraischer Funktionenkörper: der Körper der rationalen Funktionen der Koordinatenverhältnisse eines veränderlichen Punktes der Kurve. Umgekehrt gehört zu jedem von endlich vielen Elementen $E_1, E_2, \ldots, E_n$ erzeugten algebraischen Funktionenkörper einer Veränderlichen eine algebraische Kurve, deren allgemeiner Punkt die homogenen Koordinaten $E_0 = 1, E_1, \ldots, E_n$ hat.[1]) Eine solche Kurve nennt man ein *projektives Modell* des Funktionenkörpers. Da die Wahl der Erzeugenden $E_1, \ldots, E_n$ in hohem Grade willkürlich ist, so gibt es zu einem vorgegebenen Funktionenkörper mehrere projektive Modelle. Da aber jedes andere Erzeugendensystem rational von $E_1, \ldots, E_n$ abhängt und umgekehrt, so entsteht jedes projektive Modell durch *birationale Transformation* aus einem einzigen solchen Modell. Die algebraische Geometrie interessiert sich besonders für die birational invarianten Eigenschaften der Kurven, das heißt also für diejenigen, die nur vom Funktionenkörper, nicht vom Modell abhängen.

---

1) Siehe etwa meine Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin 1939, § 29.

24.

Divisorenklassen in algebraischen Funktionenkörpern

Commentarii Mathematici Helvetici 20, 1 (1947) 68-109

H. Hasse hat eine arithmetische Theorie der Divisorenklassen eines algebraischen Funktionenkörpers einer Veränderlichen über einem beliebigen vollkommenen Konstantenkörper Ω entwickelt[1]). Bei einigen für die Theorie des Abelschen Funktionenkörpers grundlegenden Sätzen ist Hasse jedoch nicht zur Durchführung der Beweise gekommen, hat aber die Erwartung ausgesprochen, daß diese Beweise sich aus der von mir gegebenen Begründung der algebraischen Geometrie ergeben würden. In der Tat ist es mir gelungen, nicht nur die fraglichen Beweise mit meinen Methoden zu erbringen, sondern darüber hinaus noch ein weiteres Problem zu lösen, das sich aus den Hasseschen Fragestellungen zwangsläufig ergab, nämlich die Konstruktion einer *Klassenmannigfaltigkeit*, deren Punkte eineindeutig den Divisorenklassen nullten Grades des gegebenen algebraischen Funktionenkörpers entsprechen. Die Klassenmannigfaltigkeit ist ein ausgezeichnetes projektives Modell des Abelschen Funktionenkörpers; ihre Punkte übernehmen die Rolle der Hasseschen „X-Punkte" (Hasse § 7, 7). Die Hasseschen Sätze § 6, 5 und § 8, 2 aber, deren Beweise hier gegeben werden sollen, drücken im wesentlichen aus, daß *den algebraischen Operationen, die man mit Divisorenklassen vornehmen kann, auch algebraische Operationen auf der Klassenmannigfaltigkeit entsprechen*. Diese Operationen sind: die Addition von Klassen $X + Y = Z$ und die komplexen Multiplikationen $X = \mu Y$, die aus den algebraischen Korrespondenzen des Funktionenkörpers entstehen.

Der Darstellung dieser Ergebnisse soll eine Übersicht über die grundlegenden Begriffe und Sätze der algebraischen Geometrie vorangeschickt werden. Ich habe mich dabei nicht auf das unbedingt notwendige Minimum an Sätzen beschränkt, sondern ich habe mich bemüht, aus diesem einleitenden Teil einen Rechenschaftsbericht über die Begründung der

[1]) *H. Hasse*, Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionenkörper, Jahresber. D. M. V. 52 (1942) S. 1—48.

algebraischen Geometrie und eine Art Lehrgang der algebraischen Geometrie für Algebraiker zu machen. Die Definitionen sind vollständig angegeben, während bei den Sätzen jeweils angegeben ist, wo man ihre Beweise finden kann.

Nach dieser Einführung (§ 1 bis 10) folgt der Hauptteil (§ 11 bis 19). Der Gedankengang des Hauptteils ist folgender. Wir gehen von einem algebraischen Funktionenkörper K vom Geschlechte g aus und legen als „projektives Modell" dieses Körpers eine singularitätenfreie Kurve Γ zugrunde. Nach Erweiterung des Konstantenkörpers Ω zu einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\overline{\Omega}$ entsprechen die Punkte von Γ eineindeutig den Stellen von K (§ 11). Die Gruppen von g Punkten auf Γ können durch Koordinaten dargestellt und so auf Punkte eines Bildraumes abgebildet werden (§ 12). Die Gesamtheit dieser Bildpunkte ist eine glatte, d. h. singularitätenfreie algebraische Mannigfaltigkeit M (§ 13). Produkte und Äquivalenzen von Punktgruppen auf Γ können durch algebraische Gleichungen zwischen ihren Koordinaten ausgedrückt werden, geben also zu algebraischen Korrespondenzen auf M Anlaß (§ 14). Setzt man dieses Ergebnis zu dem Hasseschen Begriff des $\mathfrak{X}$-Punktes in Beziehung, so erhält man den Beweis des ersten Hasseschen Satzes (§ 15). Sodann wird die erwähnte Klassenmannigfaltigkeit konstruiert, deren Punkte eineindeutig den Divisorenklassen vom Grade Null entsprechen (§ 16). Die Multiplikatoren (komplexe Multiplikationen) von K ergeben ebenfalls algebraische Korrespondenzen auf M sowie auch auf der Klassenmannigfaltigkeit (§ 17). Setzt man dieses Ergebnis wieder zum Hasseschen Begriff des $\mathfrak{X}$-Punktes in Beziehung, so ergeben sich Beweise der weiteren Sätze von Hasse (§ 18).

Erster Teil

Grundlagen der algebraischen Geometrie

§ 1. Resultantensysteme. Relationstreue Spezialisierung. Prinzip der Erhaltung der Anzahl.

1.1. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein System homogener Gleichungen

$$f_i(y_0, \ldots, y_n) = 0 \tag{1}$$

eine von der Nullösung verschiedene Lösung in einem geeigneten (algebraischen) Erweiterungskörper des Konstantenkörpers Ω besitzt, ist das Verschwinden des Resultantensystems

$$R_j(a) = 0 .$$

Nieuw Archief Wiskunde

2nd series, 22 (1948), p. 363 – 366
(7?)

ui-
ıal

ds,
art
ex-
ral

BIBLIOGRAPHIE

ANDRÉ WEIL, Foundations of Algebraic Geometry. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIX, published by the Amer. Math. Soc., New York 1946.

An excellent book, unique in its kind, but not easy to read. The reason for this is, that the author develops quite a new terminology and notations, different in many cases from the usual ones. Thus, what was called as yet an algebraic variety, is now called „a bunch of varieties", the word variety being reserved for absolutely irreducible varieties in affine spaces .Not only the words, also the definitions of these notions are quite different from the usual ones. Thus, a variety is defined by its generic point, or rather by a class of equivalent generic points, and the points of the varitey as the finite specialisations of such a generic point.

Therefore, even if the reader is acquainted with previous investigations on the foundation of algebraic geometry, he is obliged to read the whole book in order to be able to understand the essentially new methods and results developed in the highly important and interesting chapters VII—VIII.

It must be admitted that the introduction of a new nomenclature was in several cases necessary for the author's purpose. Still, it seems to me that the wish to be original, to present things in a way different from others, sometimes induced the author to make the exposition unnecessarily strange and difficult. I do not see e.g. why the use of elimination theory and of projective spaces should be avoided. But maybe I am prejudiced, and too much used to my own way of exposition.

Chapters I—II contain algebraic preparations .In Chapters IV—VI the general theory of algebraic varieties, of intersections and their multiplicities, is developed for affine spaces. In some theorems on specialisations each separate variable is allowed to assume the value ∞. However, these values do not define „points". The notion of a projective space is introduced only at the end of the book, as a special case of the important new concept of an „abstract Variety". This concept is defined in chapter VII as follows:

Let V_α, for $1 \leqq \alpha \leqq h$, be h varieties, all birationally equivalent, 1958

Ueber André Weils Neubegründung der algebraischen Geometrie

Emil Artin zum 60. Geburtstag

von B. L. van der Waerden in Zürich

Die Begründung der algebraischen Geometrie, die André Weil in seinen Foundations of algebraic geometry (1946) gegeben hat, unterscheidet sich von der bisherigen, die in meinen Arbeiten ZAG 13 und 14 (Math. Ann. 115) am einfachsten dargestellt ist, nicht nur in den Bezeichnungen und Beweismethoden, sondern auch in den Grundbegriffen.

Zunächst sind die Koordinaten der Punkte bei Weil einem „Universalkörper" entnommen, der über jeden der übrigen betrachteten Körper einen unendlichen Transzendenzgrad hat. — Sodann werden als Bausteine (varieties), aus denen die Varietäten (bunches of varieties) zusammengesetzt werden, nur unteilbare Varietäten verwendet. — Schließlich werden zu jeder einzelnen unteilbaren Varietät V gewisse „fields of definition" k durch die folgende Forderung ausgezeichnet: Ist (x) ein allgemeiner Punkt von V über k, so wird verlangt, daß $k(x)$ über k *regulär* ist, d. h. daß die algebraisch abgeschlossene Hülle $\bar{k}$ und $k(x)$ linear disjunkt sind (siehe die Definitionen in § 1 dieser Arbeit).

Alle diese Reformen sind sehr zweckmäßig. Durch die Einführung des Universalkörpers wird erreicht, daß alle Koordinaten von speziellen und allgemeinen Punkten der betrachteten Varietäten einem einzigen Körper angehören und nicht jeweils einem besonders konstruierten Erweiterungskörper des Grundkörpers. Die Punkte gehören also einem einzigen Raum an, man kann je zwei von ihnen durch eine Gerade verbinden usw. — Durch die Beschränkung auf absolut irreduzible Varietäten V wird erreicht, daß man beliebige Körpererweiterungen (z. B. die Adjunktion der Koordinaten eines allgemeinen Punktes von V) vornehmen kann, ohne daß V zerfällt. — Die Forderung der Regularität schließlich impliziert die *separable Erzeugbarkeit* von $k(x)$ über k, d. h. man kann alle x_i als separable algebraische Funktionen von r unabhängigen x_i auffassen, man kann diese Funktionen differenzieren, der Körper $k(x)$ besitzt r linear unabhängige *Derivationen* und die Varietät V hat in ihrem allgemeinen Punkt x einen r-dimensionalen *Tangentialraum* (siehe § 6).

Der Hauptsatz von Kap. I in Weils „Foundations" ist Theorem 5, das unter anderem aussagt: *$k(x)$ ist dann und nur dann regulär über k, wenn*

a) *$k(x)$ über k separabel erzeugbar,*
b) *k in $k(x)$ algebraisch abgeschlossen ist.*

Helmut Hasse ↦ van der Waerden, Hamburg, den 6. März 1952

H. empfiehlt, Roquette ("einer meiner besten Schüler") nach Zürich einzuladen. — R. hat 3 Arbeiten:

• einen neuen stark begrifflichen und wirklich sehr eleganten Beweis des Brauerschen Hauptsatzes über induzierte Charaktere . . .

• Die zweite, seine Dissertation, verallgemeinert die Deuringsche Korrespondenztheorie auf den Fall, dass auch das Argument der Korrespondenz im Divisor des Doppelkörpers ist und entwickelt daraus einen rein arithmetischen, ebenfalls sehr eleganten Beweis der Riem~~m~~anschen Vermutung in Funktionenkörpern, der es nicht erforderlich macht, sich in das hochkomplizierte Buch von A. Weil zu vertiefen.

• Die dritte Arbeit entwickelt mit denselben Methoden die Korrespondenztheorie in abelschen Funktionenkörpern im Anschluss an meinen Bericht in der DMV und ihre anschliessenden Beweise der dort noch offen gebliebenen Vermutungen. Auch hier gelingt es Roquette in einfachster Weise auf bewertungstheoretischem Wege zum Ziel zu gelangen. Durch Spezialisierung seiner allgemeinen Methoden erhält er übrigens eine elegante Neudarstellung der Deuringschen Korrespondenztheorie, bei der sogar die Ausnahmeprimdivisoren in strukturinvarianter Weise gekennzeichent werden.